Dos nuevos teoremas de suficienca en control óptimo para mínimos débiles y el problema de Lagrange con puntos fijos y con restricciones con desigualdades e igualdades mixtas

Alumno: Mauricio Balbuena Rodríguez

Director de Tesis: Gerardo Sánchez Licea

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

mayo 2018

Dos nuevos teoremas de suficienca en control óptimo para mínimos débiles y el problema de Lagrange con puntos fijos y con restricciones con desigualdades e igualdades mixtas

Alumno: Mauricio Balbuena Rodríguez

Director de Tesis: Gerardo Sánchez Licea

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

mayo 2018

Contenido

Objetivo

Objetivo

El objetivo principal de esta tesis consiste en ilustrar como un enfoque de suficiencia basado principalmente en la positividad de la segunda variación, puede ser aplicado de manera exitosa para obtener dos nuevos teoremas de suficiencia que dan respuesta al problema de control óptimo de Lagrange con puntos fijos finales, dinámicas no lineales, y restricciones explícitas tiempo-estado-control con desigualdades e igualdades.

Cálculo de Variaciones: Introducción

Cálculo de Variaciones: Introducción

• El cálculo de variaciones es una extensión de la teoría de los máximos y mínimos de las funciones diferenciables de una o más variables continuas.

• Se desarrolló a partir del problema de la curva braquistócrona, planteado inicialmente por Johann Bernoulli (1696).

• Leonhard Euler fue el primero que elaboró una teoría del cálculo variacional (1733).

• Tuvo su mayor auge en los siglos XVIII y XIX y fue en la primera mitad del sigo XX cuando tomó mayor relevancia.

• En los últimos años se ha incrementado el interés por introducir un nuevo enfoque, motivado en gran parte por las investigaciones concernientes en las áreas de la economía, las finanzas, las ciencias de los materiales y otras disciplinas.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Supongamos que tenemos:

$T : [t_0, t_1]$ un intervalo compacto en $\mathbf{R}$.

$L(t, x(t), \dot{x}(t)) : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ una función continua, asumiremos que L es C^2.

$x(t_0) = \xi_0$ y $x(t_1) = \xi_1$ dos puntos fijos en $\mathbf{R}^n$.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Supongamos que tenemos:

$T : [t_0, t_1]$ un intervalo compacto en $\mathbf{R}$.

$L(t, x(t), \dot{x}(t)) : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ una función continua, asumiremos que L es C^2.

$x(t_0) = \xi_0$ y $x(t_1) = \xi_1$ dos puntos fijos en $\mathbf{R}^n$.

El problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales (P) consiste en minimizar la funcional:

$$I(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Supongamos que tenemos:

T: $[t_0, t_1]$ un intervalo compacto en $\mathbf{R}$.

$L(t, x(t), \dot{x}(t)) : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ una función continua, asumiremos que L es C^2.

$x(t_0) = \xi_0$ y $x(t_1) = \xi_1$ dos puntos fijos en $\mathbf{R}^n$.

El problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales (P) consiste en minimizar la funcional:

$$I(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Sujeto a

(a) x: $T \to \mathbf{R}^n$, C^1 a pedazos.

(b) $x(t_0) = \xi_0$ y $x(t_1) = \xi_1$.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Ejemplo:

Sea T : $[0, 1]$ un intervalo compacto en $\mathbf{R}$.

Minimizar la funcional:

$$I(x) := \int_0^1 x^2 + \dot{x}^2 dt.$$

Sujeto a

(a) $x: T \to \mathbf{R}^n$, C^1 a pedazos.

(b) $x(0) = 0$ *y* $x(1) = 1$.

En este caso $L(t, x(t), \dot{x}(t)) := x^2 + \dot{x}^2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\xi_0 = 0$ y $\xi_1 = 1$.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Definición: Un arco o trayectoria $x : T \to \mathbf{R}^n$ que satisface las restricciones (a) y (b) se le llama arco o trayectoria admisible.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Definición: Un arco o trayectoria $x\colon\ T \to \mathbf{R}^n$ que satisface las restricciones (a) y (b) se le llama arco o trayectoria admisible.

Definición: Si $x\colon\ T \to \mathbf{R}^n$ es C^1 a pedazos, definimos

$$\|x\|_0 := \sup_{t\in T} |x(t)|,$$

$$\|x\|_1 := \sup_{t\in T}(|x(t)| + |\dot{x}(t)|).$$

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Definición: Un arco admisible x es una *solución global* de (P) si $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y. Diremos que x es un *mínimo fuerte* de (P) si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y que satisface $\|y - x\|_0 < \epsilon$. Diremos que x es un *mínimo débil* de (P) si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y que satisface $\|y - x\|_1 < \epsilon$. Diremos que el arco admisible x es una *solución global estricta* de (P) si x es una solución global de (P) y además $I(x) = I(y)$ sólo en el caso en que $x = y$. Las definiciones para mínimos estrictos fuertes y débiles se establecen análogamente.

Cálculo de Variaciones: Problema clásico de cálculo de variaciones con puntos fijos finales

Definición: Un arco admisible x es una *solución global* de (P) si $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y. Diremos que x es un *mínimo fuerte* de (P) si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y que satisface $\|y - x\|_0 < \epsilon$. Diremos que x es un *mínimo débil* de (P) si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x) \leq I(y)$ para toda trayectoria admisible y que satisface $\|y - x\|_1 < \epsilon$. Diremos que el arco admisible x es una *solución global estricta* de (P) si x es una solución global de (P) y además $I(x) = I(y)$ sólo en el caso en que $x = y$. Las definiciones para mínimos estrictos fuertes y débiles se establecen análogamente.

Definición: Obsérvese que si x es una solución global de (P), entonces x es un mínimo fuerte de (P) y, a su vez, si x es un mínimo fuerte de (P), entonces x es un mínimo débil de (P).

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

- La condición de Euler-Lagrange es la condición necesaria de primer orden para óptimo local más importante del cálculo de variaciones.

- Indica si la trayectoria propuesta es un candidato a solucionar el problema P.

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

• La condición de Euler-Lagrange es la condición necesaria de primer orden para óptimo local más importante del cálculo de variaciones.

• Indica si la trayectoria propuesta es un candidato a solucionar el problema P.

Teorema: *Supongamos que x_0 es un mínimo débil de (P). Entonces existe una constante $c \in \mathbf{R}^n$ tal que*

$$L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \int_{t_0}^{t} L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))ds + c^* \quad (t \in T).$$

A esta expresión se le conoce como la forma integral de la ecuación de Euler.

La ecuación de Euler también la podemos escribir en su forma diferencial de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad (t \in T).$$

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

En un punto esquina de x_0 la derivada d/dt se interpreta como una derivada izquierda o derecha. La ecuación de Euler en su forma diferencial se cumple aun cuando x_0 no tenga una segunda derivada.

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

En un punto esquina de x_0 la derivada d/dt se interpreta como una derivada izquierda o derecha. La ecuación de Euler en su forma diferencial se cumple aun cuando x_0 no tenga una segunda derivada.

Observación: Puede suceder que la forma integral de la ecuación de Euler no sea equivalente a la ecuación de Euler. De hecho, si un arco x satisface la forma integral de la ecuación de Euler, entonces x satisface la ecuación de Euler. El recíproco, puede ser falso si la función $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ no es continua en T.

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

En un punto esquina de x_0 la derivada d/dt se interpreta como una derivada izquierda o derecha. La ecuación de Euler en su forma diferencial se cumple aun cuando x_0 no tenga una segunda derivada.

Observación: Puede suceder que la forma integral de la ecuación de Euler no sea equivalente a la ecuación de Euler. De hecho, si un arco x satisface la forma integral de la ecuación de Euler, entonces x satisface la ecuación de Euler. El recíproco, puede ser falso si la función $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ no es continua en T.

Si x es C^2 en T y L es C^2 en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, la ecuación de Euler se convierte en

$$L^*_{\dot{x}t} + L_{\dot{x}x}\dot{x}(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}(t) = L^*_x \quad (t \in T)$$

donde los argumentos en las derivadas de L son $(t, x(t), \dot{x}(t))$. Por lo tanto, si x es C^2 en T y L es C^2 en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, entonces la ecuación de Euler es una ecuación diferencial de segundo grado y de esta manera dicha ecuación es una herramienta fundamental para obtener candidatos x a resolver el problema (P).

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Euler-Lagrange

Ejemplo:

Minimizar la funcional:

$$I(x) := \int_0^1 x^2 + \dot{x}^2 dt.$$

$L(t, x, \dot{x}) := x^2 + \dot{x}^2$

$L_x(t, x, \dot{x}) := 2x$

$L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) := 2\dot{x}$

La ecuación de Euler seria: $\ddot{x} - x = 0$

es una ecuación de segundo orden homogénea, cuya solución es de la forma.

$x(t) = A\exp(t) + B\exp(-t)$

$x(t) = \frac{exp}{\exp(2)-1}\exp(t) - \frac{exp}{\exp(2)-1}\exp(-t)$

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Weierstrass

- Proporciona una condición necesaria de primer orden para un mínimo débil o fuerte.

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Weierstrass

- Proporciona una condición necesaria de primer orden para un mínimo débil o fuerte.

Definición: *Definamos* $E: T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}).$$

A la función E se le llama la función *exceso de Weierstrass* de L.

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Weierstrass

- Proporciona una condición necesaria de primer orden para un mínimo débil o fuerte.

Definición: *Definamos* $E : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}).$$

A la función E se le llama la función *exceso de Weierstrass* de L.

Teorema: *Sea* x_0 *un mínimo débil de (P). Entonces existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$E(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0 \quad \textit{para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n \textit{ con } |u - \dot{x}_0(t)| < \sigma.$$

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Weierstrass

- Proporciona una condición necesaria de primer orden para un mínimo débil o fuerte.

Definición: *Definamos* $E : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *por*

$$E(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}).$$

A la función E se le llama la función *exceso de Weierstrass* de L.

Teorema: *Sea* x_0 *un mínimo débil de (P). Entonces existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$E(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0 \quad \text{para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n \text{ con } |u - \dot{x}_0(t)| < \sigma.$$

Teorema: *Sea* x_0 *un mínimo fuerte de (P). Entonces*

$$E(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0 \quad \text{para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n.$$

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Weierstrass

Ejemplo

$x_0 = \frac{exp}{\exp(2)-1}\exp(t) - \frac{exp}{\exp(2)-1}\exp(-t)$

Sea x_0 un mínimo débil de (P)

$L(t,x,u)$= x^2 + u^2

$L(t,x,\dot{x})$= x^2 + $\dot{x}^2$

$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2\dot{x}$

$E(t,x_0,\dot{x}_0,u)$= x_0^2 + u^2 - x_0^2 - $\dot{x}_0^2$- $2\dot{x}$ $(u-\dot{x}_0)$

entonces

$E(t,x_0,\dot{x}_0,u) = u^2 - 2\dot{x}_0 u + \dot{x}_0^2 = (u-\dot{x})^2 \geq 0$

Cálculo de Variaciones: Condición necesaria de Legendre

• El siguiente resultado da una condición necesaria de segundo orden.

Corolario: Si x_0 satisface la condición de Weierstrass para un mínimo débil, entonces la matriz Hessiana $L_{\dot{x}\dot{x}}$ es semi-definida positiva a lo largo de x_0, esto es, para toda $h \in \mathbf{R}^n$ y para toda $t \in T$,

$$\langle h, L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))h \rangle \geq 0.$$

Ejemplo:

$L(t, x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$

$L_x(t, x, \dot{x}) = 2x$

$L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 2\dot{x}$

$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 2 > 0$

Cálculo de Variaciones: Positividad regular

Definición: A una solución x_0 de la forma integral de la ecuación de Euler se le llamará extremal. A un extremal sin esquinas se le llamará extremo. Un extremal está constituido de un número finito de subarcos los cuales son extremos. A un arco admisible x_0 se le dirá *no singular* si el determinante

$$|L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))| \neq 0$$

para toda $t \in T$.

Definición: La integral I se llamará *positiva regular* si

$$\langle h, L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x})h \rangle > 0$$

para toda $(t, x, \dot{x}) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ y para toda $h \neq 0$.

Teorema: Si I es positiva regular, entonces

$$E(t, x, \dot{x}, u) > 0$$

para toda $(t, x, \dot{x}, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ con $u \neq \dot{x}$. Además, todo extremal es un extremo no singular.

Cálculo de Variaciones: La condición de Jacobi

La teoría de Jacobi consiste en caracterizar a la no negatividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles con las condiciones de Legendre y Jacobi.

Se define la segunda variación

$I''(x_0, \cdot)$ de I a lo largo de un arco admisible x_0 toma la forma

$$I''(x_0, y) = \int_{t_0}^{t_1} 2\omega(t, y(t), \dot{y}(t))dt,$$

donde

$$2\omega(t, y, \dot{y}) := \langle y, L_{xx} y\rangle + 2\langle \dot{y}, L_{\dot{x}x} y\rangle + \langle \dot{y}, L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{y}\rangle$$

y los argumentos en las derivadas de L son $(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$. Además, si x_0 es un mínimo débil de (P), entonces

$$I''(x_0, y) \geq 0$$

Teorema: Si un arco no singular sin esquinas x_0 es un mínimo débil de (P), entonces no hay ningún punto $s \in (t_0, t_1)$ conjugado a $t = t_0$ sobre x_0.

Cálculo de Variaciones: La condición de Jacobi

Teorema: La desigualdad $I''(x_0, y) > 0$ se cumple para toda $y \neq 0$ en Y si y solo si no existe ningún punto $c \in (t_0, t_1]$ conjugado a t_0 sobre x_0.

Teorema: La desigualdad $I''(x_0, y) \geq 0$ se cumple para toda y en Y si y solo si no existe ningún punto $c \in (t_0, t_1)$ conjugado a t_0 sobre x_0.

Teorema: Si $I''(x_0, y) \geq 0$ para toda $y \in Y$, entonces $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \geq 0$ para toda $t \in T$.

Teorema: La desigualdad $I''(x_0, y) \geq 0$ se cumple para toda y en Y si y solo si no existe ningún punto $c \in (t_0, t_1)$ conjugado a t_0 sobre x_0 y $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \geq 0$ para toda $t \in T$.

Teorema: La desigualdad $I''(x_0, y) > 0$ se cumple para toda $y \neq 0$ en Y si y solo si no existe ningún punto $c \in (t_0, t_1]$ conjugado a t_0 sobre x_0 y $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ para toda $t \in T$.

Cálculo de Variaciones: Teoremas de suficiencia

- El siguiente de suficiencia es el más importante de la teoría clásica del cálculo de variaciones para mínimos locales fuertes.

Cálculo de Variaciones: Teoremas de suficiencia

• El siguiente de suficiencia es el más importante de la teoría clásica del cálculo de variaciones para mínimos locales fuertes.

Teorema: Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. Para alguna $\epsilon > 0$, $E(t, x, \dot{x}, u) \geq 0$ para $(t, x, \dot{x}, u)$ con $(t, x, \dot{x}) \in \mathcal{T}_1(x_0; \epsilon)$.

d. $c \in (t_0, t_1] \Longrightarrow c$ no es un punto conjugado a t_0 sobre x_0.

Entonces x_0 es un mínimo fuerte estricto de (P).

Cálculo de Variaciones: Teoremas de suficiencia

- El siguiente teorema es más importante de suficienciade la teoría clásica del cálculo de variaciones para mínimos locales débiles.

Cálculo de Variaciones: Teoremas de suficiencia

• El siguiente teorema es más importante de suficienciade la teoría clásica del cálculo de variaciones para mínimos locales débiles.

Teorema: Sea x_0 admisible de clase C^1. Supongamos que

a. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

b. $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ $(t \in T)$.

c. $c \in (t_0, t_1] \Longrightarrow c$ no es un punto conjugado a t_0 sobre x_0.

Entonces x_0 es un mínimo débil estricto de (P).

Control Óptimo: Introducción

• La teoría del control óptimo empezó a desarrollarse entre los años 50 y 60 por un equipo de matemáticos rusos dirigidos por Pontryagin.

• Esta teoría constituye una herramienta complementaria para resolver problemas como los de optimización dinámica, incluyendo a la teorí clásica del cálculo de variaciones y el principio de optimalidad asociado a la ecuación de Bellman.

• En teoría de control óptimo se considera un sistema dinámico (evoluciona en el tiempo) en un horizonte temporal dado.

• La situación del sistema en cada instante t, se expresa mediante un vector n-dimensional de variables de estado $x(t)$, y la evolución del sistema depende del valor que se da a un vector m-dimensional de variables de control $u(t)$

• Mientras que el cálculo de variaciones focaliza en la variable de estado, el control óptimo focaliza en la variable control.

Control Óptimo:Un modelo de un sector de la economía

Asumiremos que

- El único factor que disminuye el capital por trabajador es la incorporación de nuevos trabajadores a la economía.

- $x(t)$ es el capital por trabajador al tiempo t

- $P(t)$ es la tasa de producción por trabajador al tiempo t.

- $P(t)x(t)$ es la tasa de incremento del capital por trabajador a causa de la producción.

- La población tiene una tasa de crecimiento $G(t)$ en el tiempo t, por lo tanto hay una tasa de decrecimiento $-G(t)x(t)$ del capital por trabajador a causa del crecimiento poblacional.

- Una fracción $u(t)$ de la producción generada se mantiene en la economía y la fracción restante $1 - u(t)$ es consumida.

- De esta manera, la ecuación $\dot{x}(t) = u(t)P(t)x(t) - G(t)x(t)$ proporciona la tasa de cambio del capital por trabajador dada por la diferencia entre la tasa de incremento del capital no consumido menos la tasa de incremento de capital a causadel crecimiento de la población.

Control Óptimo:Un modelo de un sector de la economía

Consideremos el problema de elegir un plan de ahorro $u(t)$ para incrementar o disminuir el capital por trabajador de un punto inicial fijo ξ_0 a un punto terminal fijo ξ_1, en un intervalo de tiempo $T := [t_0, t_1]$, mientras que se maximiza la tasa global de consumo

$$\int_{t_0}^{t_1} [1 - u(t)]P(t)x(t)dt.$$

- Supongamos que el intervalo de tiempo es $T = [0, 1]$,
- $\xi_0 = (1/3)\exp(2/3)$ y $\xi_1 = 1/3$.
- La tasa de crecimiento G está dada por $G(t) := t^{1/2}$
- La producción está dada por $P(t) := t^{1/2}/2$.
- Introduciremos dos restricciones con igualdades tiempo-estado-control

$$\varphi_\beta(t, x(t), u(t)) = 0 \; (\beta = 1, 2, t \in T).$$

En este caso, las funciones
están dadas por

$$\varphi_1(t, x, u) := xu\exp(-u) - (1/2)x^2u \quad \text{y} \quad \varphi_2(t, x, u) := t^2x^2u^4 - 2t^2xu^4 + t^2u^4 - 4txu^2.$$

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos fijos ξ_0 y ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, y funciones L, f y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^q$ respectivamente.

Sea

$$\mathcal{A} := \{(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \varphi_\alpha(t, x, u) \leq 0 \, (\alpha \in R), \, \varphi_\beta(t, x, u) = 0 \, (\beta \in Q)\}$$

donde $R = \{1, \ldots, r\}$ y $Q = \{r+1, \ldots, q\}$ $(0 \leq r \leq q)$. Si $r = 0$ entonces $R = \emptyset$ y hacemos caso omiso de las funciones φ_α. Similarmente, Si $r = q$ entonces $Q = \emptyset$ y hacemos caso omiso de las funciones φ_β.

El problema de control óptimo de puntos fijos que consideraremos, denotado por (P), es el de minimizar la funcional

$$I(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt$$

sobre todas las parejas (x, u) con $x \colon T \to \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $u \colon T \to \mathbf{R}^m$ esencialmente acotada, que satisfacen las restricciones:

(a) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ (c.s. en T).

(b) $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$.

(c) $(t, x(t), u(t)) \in \mathcal{A}$ $(t \in T)$.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

• Denotemos por $\mathcal{X}$ al espacio de las funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$, por $\mathcal{U}_s := L^\infty(T; \mathbf{R}^s)$ $(s \in \mathbf{N})$. Los elementos de $\mathcal{X} \times \mathcal{U}_m$ los llamaremos procesos y un proceso (x, u) es admisible si satisface (a)-(c). Un proceso (x, u) *resuelve* (P) si es admisible e $I(x, u) \leq I(y, v)$ para todos los procesos admisibles (y, v). Para mínimos locales débiles, un proceso admisible (x, u) es llamado un mínimo débil de (P) si es un mínimo para I relativo a la norma

$$\|(x, u)\| := \text{ínf}\{C > 0 : |(x(t), u(t))| \leq C \,(\text{c.s. en } T)\},$$

es decir, si para alguna $\epsilon > 0$, $I(x, u) \leq I(y, v)$ para todos los procesos admisibles (y, v) que satisfacen $\|(y, v) - (x, u)\| < \epsilon$. Este es un mínimo estricto si $I(x, u) = I(y, v)$ solamente en el caso en que $(x, u) = (y, v)$.

• Se asumirá que las funciones L, f y φ son continuas y de clase C^2 con respecto a x y a u en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Continuando con nuestro modelo, demostraremos que al escoger un plan de ahorro $u(t)$ en el cual todo el capital producido $P(t)x(t)$ es consumido al tiempo t, la tasa global de consumo $\int_0^1 [1 - u(t)]P(t)x(t)dt$ se maximiza localmente.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Continuando con nuestro modelo, demostraremos que al escoger un plan de ahorro $u(t)$ en el cual todo el capital producido $P(t)x(t)$ es consumido al tiempo t, la tasa global de consumo $\int_0^1 [1 - u(t)]P(t)x(t)dt$ se maximiza localmente.

El problema de control óptimo (P) consiste en minimizar

$$I(x, u) := \int_0^1 (t^{1/2}/2)x(t)[u(t) - 1]dt$$

sobre todas las parejas (x, u) con $x\colon T \to \mathbf{R}$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}$ esencialmente acotada.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Continuando con nuestro modelo, demostraremos que al escoger un plan de ahorro $u(t)$ en el cual todo el capital producido $P(t)x(t)$ es consumido al tiempo t, la tasa global de consumo $\int_0^1 [1 - u(t)]P(t)x(t)dt$ se maximiza localmente.

El problema de control óptimo (P) consiste en minimizar

$$I(x,u) := \int_0^1 (t^{1/2}/2)x(t)[u(t) - 1]dt$$

sobre todas las parejas (x,u) con $x\colon T \to \mathbf{R}$ absolutamente continua y $u\colon T \to \mathbf{R}$ esencialmente acotada.

sujeta a las restricciones:

(a) $\dot{x}(t) = (t^{1/2}/2)x(t)u(t) - t^{1/2}x(t)$ (c.s. en $[0,1]$).
(b) $x(0) = (1/3)\exp(2/3)$ y $x(1) = 1/3$.
(c) $(t, x(t), u(t)) \in \mathcal{A}$ $(t \in T)$.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Aquí,

$$\mathcal{A} := \{(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \varphi_\beta(t, x, u) = 0 \ (\beta \in Q)\}$$

con $Q = \{1, 2\}$.

Control Óptimo: Planteamiento del problema

Aquí,

$$\mathcal{A} := \{(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \varphi_\beta(t, x, u) = 0 \ (\beta \in Q)\}$$

con $Q = \{1, 2\}$.

Para este caso:

$$n = m = 1$$

$$q = 2 \text{ y } r = 0$$

$$T = [0, 1]$$

$$\xi_0 = (1/3)\exp(2/3) \text{ y } \xi_1 = 1/3$$

$$L(t, x, u) = (t^{1/2}/2)x[u - 1]$$

$$f(t, x, u) = (t^{1/2}/2)xu - t^{1/2}x,$$

$$\varphi_1(t, x, u) = xu\exp(-u) - (1/2)x^2u,$$

$$\varphi_2(t, x, u) = t^2x^2u^4 - 2t^2xu^4 + t^2u^4 - 4txu^2.$$

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

Teorema: Sea (x_0, u_0) un proceso admisible. Asumamos que $\mathcal{I}_a(\tilde{x}_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathcal{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(\tilde{x}_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$$\dot{p}(t) = -H_x^*(\tilde{x}_0(t), p(t), \mu(t)) \text{ (c.s. en } T), \; H_u(\tilde{x}_0(t), p(t), \mu(t)) = 0 \; (t \in T),$$

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) \geq 0$ (c.s. en T).

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para toda $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisface

(a) $\dot{y}(t) = f_x(\tilde{x}_0(t))y(t) + f_u(\tilde{x}_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi_{\alpha x}(\tilde{x}_0(t))y(t) + \varphi_{\alpha u}(\tilde{x}_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(\tilde{x}_0(t))$), $\varphi_{\beta x}(\tilde{x}_0(t))y(t) + \varphi_{\beta u}(\tilde{x}_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

(iii) Para algunas $h, \epsilon > 0$, si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \epsilon$, entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq hD(u - u_0).$$

Entonces existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

En particular, (x_0, u_0) es un mínimo estricto débil de (P).

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

Ejemplo: Siguiendo con nuestro modelo económico

Sea $(x_0, u_0) \equiv ((1/3)\exp\{(2/3)[1 - t^{3/2}]\}, 0)$ la cual es admisible.

- Definamos

$$H(t, x, u, p, \mu) := \langle p, f(t, x, u)\rangle - L(t, x, u) - \langle \mu, \varphi(t, x, u)\rangle.$$

Para toda $(t, x, u, p, \mu) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ sea

Tenemos que

Sea $p \equiv 1/2$,

$$\mu_1(t) := -\frac{t^{1/2}}{4[1 - (1/6)\exp\{(2/3)[1 - t^{3/2}]\}]} \quad \text{y} \quad \mu_2(t) := 0 \quad (t \in T).$$

Se puede verificar fácilmente que (x_0, u_0, p, μ) satisface la condición de primer orden del Teorema.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

- Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ definamos, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t, x, u) := -H(t, x, u, p(t), \mu(t)) - \langle \dot{p}(t), x \rangle.$$

En nuestro caso, la función F está dada por

$$F(t, x, u) = \frac{t^{1/2} x u}{4} - \frac{t^{1/2}[xu \exp(-u) - (1/2)x^2 u]}{4[1 - (1/6)\exp\{(2/3)[1 - t^{3/2}]\}]}$$

y por lo tanto,

$$F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) = \frac{t^{1/2} \exp\{(2/3)[1 - t^{3/2}]\}}{6[1 - (1/6)\exp\{(2/3)[1 - t^{3/2}]\}]} \quad (t \in T)$$

lo que implica que (x_0, u_0) es *singular* y se satisface la hipótesis (i) del Teorema.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

• Definimos la segunda variación de J con respecto a $(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}_m$ sobre $(y,v) \in \mathcal{X} \times L^2(T;\mathbf{R}^m)$ dada por

$$J''((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t,y(t),v(t))dt$$

donde, para toda $(t,y,v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$2\Omega(t,y,v) := \langle y, F_{xx}(\tilde{x}(t))y\rangle + 2\langle y, F_{xu}(\tilde{x}(t))v\rangle + \langle v, F_{uu}(\tilde{x}(t))v\rangle.$$

• Dadas $p \in \mathcal{X}$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$, decimos que (x_0,u_0,p,μ) (o a veces que (x_0,u_0)) es *no singular* si el determinante

$$|F_{uu}(\tilde{x}_0(t))| = |-H_{uu}(\tilde{x}_0(t),p(t),\mu(t))| \neq 0 \quad (t \in T).$$

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

También, observemos que, para toda $t \in T$,

$$f_x(\tilde{x}_0(t)) = -t^{1/2} \quad \text{y} \quad f_u(\tilde{x}_0(t)) = \frac{t^{1/2}\exp\{(2/3)[1-t^{3/2}]\}}{6}$$

y por lo tanto (y, v) satisface (a) y (b) de la hipótesis (ii) si y solo si

$$\dot{y}(t) = -t^{1/2}y(t) + \frac{t^{1/2}\exp\{(2/3)[1-t^{3/2}]\}}{6}v(t) \text{ (c.s. en } T\text{)},$$

$y(0) = y(1) = 0$, y

$$(1/3)\exp\{(2/3)[1-t^{3/2}]\}[1-(1/6)\exp\{(2/3)[1-t^{3/2}]\}]v(t) = 0 \text{ (c.s. en } T\text{)}.$$

En consecuencia, no existe ninguna $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R})$ no nula que satisfaga (a) y (b) de la hipótesis (ii) del teorema y por lo tanto la hipótesis (ii) se cumple.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

• Denotemos por E a la función exceso de Weierstrass con respecto a F,

$$E(t,x,u,v) := F(t,x,v) - F(t,x,u) - F_u(t,x,u)(v-u).$$

• Para toda $u \in L^1(T;\mathbf{R}^m)$ sea

$$D(u) := \int_{t_0}^{t_1} V(u(t))dt \quad \text{donde} \quad V(b) := (1+|b|^2)^{1/2} - 1.$$

• Para toda $(t,x,u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, sea

$$\mathcal{I}_a(t,x,u) := \{\alpha \in R \mid \varphi_\alpha(t,x,u) = 0\},$$

el conjunto de índices activos de (t,x,u).

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia

Para demostrar la hipótesis (iii) del Teorema, se supone que ésta no secumple

Entonces para toda $q \in \mathbf{N}$, existe un proceso admisible (x_q, u_q) tal que

$$\|(x_q, u_q) - (x_0, u_0)\| < \frac{1}{q},$$

$$\int_0^1 E(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t))dt < \frac{1}{q} D(u_q - u_0).$$

Notemos que la última desigualdad implica que $u_q \neq 0$ $(q \in \mathbf{N})$.

El desarrollo de la demostración se puede consultar a detalle en la tesis completa, en dicha demostración llegamos a una contradicción.

Y en consecuencia, podemos decir que existen h; > 0 tales que la condición (iii) del Teorema es satisfecha.

Por lo tanto, (x0; u0) es un mínimo estricto débil de (P).

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia (corolario)

Corolario: Sea (x_0, u_0) un proceso admisible con u_0 continua. Asumamos que $\mathcal{I}_a(\tilde{x}_0(\cdot))$ es constante a pedazos en T, y supongamos que existen $p \in \mathcal{X}$, $\mu \in \mathcal{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(\tilde{x}_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R, t \in T)$ tales que

$$\dot{p}(t) = -H_x^*(\tilde{x}_0(t), p(t), \mu(t)) \text{ (c.s. en } T), \; H_u(\tilde{x}_0(t), p(t), \mu(t)) = 0 \; (t \in T),$$

y las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

(ii) $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ para todas las $(y, v) \neq (0, 0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^m)$ que satisfacen

(a) $\dot{y}(t) = f_x(\tilde{x}_0(t))y(t) + f_u(\tilde{x}_0(t))v(t)$ (c.s. en T), $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

(b) $\varphi_{\alpha x}(\tilde{x}_0(t))y(t) + \varphi_{\alpha u}(\tilde{x}_0(t))v(t) \leq 0$ (c.s. en T, $\alpha \in \mathcal{I}_a(\tilde{x}_0(t))$), $\varphi_{\beta x}(\tilde{x}_0(t))y(t) + \varphi_{\beta u}(\tilde{x}_0(t))v(t) = 0$ (c.s. en T, $\beta \in Q$).

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia (corolario)

Entonces existen $\rho, \delta > 0$ tales que si (x, u) es admisible con $\|(x, u) - (x_0, u_0)\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

En particular, (x_0, u_0) es un mínimo estricto débil de (P).

Ejemplo: Sea $\gamma > 0$ y sea (P_γ) el problema de minimizar

$$I_\gamma(x, u) = \int_0^\pi \{(\gamma/2)u_2^2(t) + \tfrac{1}{2}u_2(t) - \tfrac{1}{2}x^2(t)\}dt$$

Sujeto a

(a) $\dot{x}(t) = u_1(t)$ $(t \in [0, \pi])$,

(b) $x(0) = x(\pi) = 0$,

(c) $u_1^2(t) - u_2(t) - u_1(t) \leq 0$ y $u_1(t) - u_2(t) \leq 0$ $(t \in [0, \pi])$.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia (corolario)

En este caso $T = [0, \pi]$, $n = 1$, $m = 2$, $q = 2$, $r = 2$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$,

$$L(t, x, u) = (\gamma/2)u_2^2 + \tfrac{1}{2}u_2 - \tfrac{1}{2}x^2, \quad f(t, x, u) = u_1,$$

$$\varphi_1(u) = u_1^2 - u_2 - u_1, \quad \varphi_2(u) = u_1 - u_2.$$

En consecuencia

$$H(t, x, u, p, \mu) = pu_1 - (\gamma/2)u_2^2 - \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}x^2 - \mu_1[u_1^2 - u_2 - u_1] - \mu_2[u_1 - u_2],$$

y por lo tanto

$$H_x(t, x, u, p, \mu) = x,$$

$$H_u(t, x, u, p, \mu) = (p - 2\mu_1 u_1 + \mu_1 - \mu_2, -\gamma u_2 - \tfrac{1}{2} + \mu_1 + \mu_2).$$

Sea $(x_0, u_0) \equiv (0, 0, 0)$ la cual es admisible. Notemos que $\mathcal{I}_a(u_0(t)) = \{1, 2\}$ es constante en T.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia (corolario)

Si definimos $(p, \mu) \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, entonces, $\mu_1(t), \mu_2(t) \geq 0$, $\mu_1(t)\varphi_1(u_0(t)) = 0$ y $\mu_2(t)\varphi_2(u_0(t)) = 0$ $(t \in T)$.

También, (x_0, u_0, p, μ) satisface la condición de primer orden del corolario.

Tenemos que, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$

$$F(t, x, u) = \tfrac{1}{2}u_1^2 + (\gamma/2)u_2^2 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Por lo tanto,

$$F_{uu}(\tilde{x}_0(t)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (t \in T).$$

y por lo tanto la hipótesis (i) se verifica.

Control Óptimo: Teorema de Suficiencia (corolario)

También,

$F_{xx}(\tilde{x}_0(t)) = -1$ y $F_{xu}(\tilde{x}_0(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$,

y en consecuencia

$$J''((x_0, u_0); (y, v)) = \int_0^{\pi} \{v_1^2(t) + \gamma v_2^2(t) - y^2(t)\} dt > 0$$

para toda $(y, v) \neq (0,0)$, $(y, v) \in \mathcal{X} \times L^2(T; \mathbf{R}^2)$

que satisface $\dot{y}(t) = v_1(t)$ (c.s. en T), $y(0) = y(\pi) = 0$, $-v_1(t) - v_2(t) \leq 0$, $v_1(t) - v_2(t) \leq 0$ (c.s. en T).

Consecuentemente, la hipótesis (ii) es satisfecha.

Por el corolario, (x_0, u_0) es un mínimo estricto débil de (P_γ).

Bibliografía

[1] Berlanga, R., & Rosenblueth, J. F., Jacobi's Condition for Singular Extremals: An extended Notion of Conjugate Points, Applied Mathematics Letters 15, pp. 453-458, 2002.

[2] Berlanga, R., & Rosenblueth, J. F. (2004) Extended conjugate points in the calculus of variations, IMA Journal of Mathematical Control and Information 21, pp. 159-173, 2004.

[3] F. H. Clarke and V. M. Zeidan, Sufficiency and the Jacobi condition in the calculus of variations, Canadian Journal of Mathematics, 38 (1986), pp. 1199–1209.

[4] F. H. Clarke, Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer-Verlag, London, 2013.

[5] M. R. De Pinho and J. F. Rosenblueth, Mixed constraints in optimal control: an implicit function theorem approach, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24 (2007), pp. 197–218

[6] G. M. Ewing, Calculus of Variations with Applications, Dover, New York, 1985.

Bibliografía

[7] M. R. Hestenes, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, John Wiley, New York, 1966.

[8] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, Theory of Extremal Problems, Translated from the Russian by K. Makowski, Studies in Mathematics and its Applications 6, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1979.

[9] P. D. Loewen, Second-order sufficiency criteria and local convexity for equivalent problems in the calculus of variations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 146 (1990), pp. 512–522.

[10] K. Malanowski, Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints, SIAM Journal on Control and Optimization, 35 (1997), pp. 205–227.

[11] K. Malanowski, H. Maurer and S. Pickenhain, Second order sufficient conditions for state- constrained optimal control problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 123 (2004), pp. 595–617.

[12] H. Maurer, First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control, Mathematical Programming Study, 14 (1981), pp. 163–177.

Bibliografía

[13] H. Maurer and S. Pickenhain, Second order sufficient conditions for control problems with mixed control-state constraints, Journal of Optimization Theory and Applications, 86 (1995), pp. 649–667.

[14] H. Maurer and H. J. Oberle, Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time: the Riccati approach, SIAM Journal on Control and Optimization, 41 (2002), pp. 380–403.

[15] D. Q. Mayne, Sufficient conditions for a control to be a strong minimum, Journal of Optimization Theory and Applications, 21 (1977), pp. 339–351.

[16] E. J. McShane, Sufficient conditions for a weak relative minimum in the problem of Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, 52 (1942), pp. 344–379.

[17] A. A. Milyutin and N. P. Osmolovskiĭ, Calculus of Variations and Optimal Control, Translations of Mathematical Monographs 180, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[18] G. Stefani and P. L. Zezza, Optimality conditions for a constrained optimal control problem, SIAM Journal on Control and Optimization, 34 (1996), pp. 635–659.

Bibliografía

[19] V. M. Zeidan, *First and second order sufficient conditions for optimal control and the calculus of variations*, Applied Mathematics and Optimization 11 (1984), pp. 209–226.

[20] V. M. Zeidan, Sufficiency conditions with minimal regularity assumptions, Applied Mathematics and Optimization 20 (1989), pp. 19–31.

[21] V. M. Zeidan, The Riccati equation for optimal control problems with mixed state-control constraints: necessity and sufficiency, SIAM Journal on Control and Optimization 32 (1994), pp. 1297–1321.